



Національний технічний університет України
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



Кафедра
математичної фізики
та диференціальних
рівнянь

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ В ПУБЛІЧНОМУ УПРАВЛІННІ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	28 Публічне управління та адміністрування
Спеціальність	281 Публічне управління та адміністрування
Освітня програма	Адміністративний менеджмент
Статус дисципліни	Нормативна
Форма навчання	заочна
Рік підготовки, семестр	1 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	120 год (4 кредити ЄКТС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Залік Модульна контрольна робота, розрахункова робота, роботи з комп'ютерного практикуму
Розклад занять	rozklad.kpi.ua
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Селезньова Надія Петрівна, к.фіз.-мат.н., доцент (лекції, практичні, комп. практикум) nadijasel@gmail.com
Розміщення курсу	https://mph.kpi.ua/ https://campus.kpi.ua/tutor/index.php?mode=mob&show&irid=264953

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Метою формування базових знань для застосування математичного апарату до задач публічного управління; вивчення студентами основних методів та аналітичної геометрії і матричного числення, початкових понять диференціального та інтегрального числення для використання інструментарію цих розділів математики в дослідженні економічних об'єктів і процесів, задач електронного урядування, адміністративного менеджменту.

Предметом освітнього компоненту є основи математичних знань, завдяки яким формується математична компетентність студентів, яка проявляється в управлінській діяльності, здатністю самостійно, вільно володіти мінімальним математичним інструментарієм та надавати адекватну інтерпретацію отриманого математичного результату, моделювання оптимізаційних задач управління, знаходити нестандартні рішення в нових ситуаціях, умінням математичними методами прогнозувати та оцінити характер і хід змін у процесі адміністративного управління.

Програмні компетентності:

(ЗК1)¹ Здатність самостійно навчатися та оволодівати сучасними знаннями.

(ЗК9) Здатність до пошуку обробки та аналізу інформації із різних джерел.

Програмні результати навчання:

(11) Уміти здійснювати пошук та узагальнення інформації, робити висновки і формувати рекомендації в межах діяльності публічного управління та адміністрування.

(16) Використовувати дані статистичної звітності, обліку та спеціальних досліджень у професійній діяльності.

Також результатами навчання є уміння здійснювати пошук та узагальнення числової інформації, робити висновки і формулювати рекомендації в межах своєї компетенції, переводити нечислову інформацію у числову, уміння використовувати математичні, зокрема, графічні, методи аналізу та оцінювання програм сталого розвитку; уміння виконувати алгебраїчні дії над матрицями, обчислювати визначники, досліджувати та розв'язувати системи лінійних рівнянь; на основі матричного числення освоїти модель міжгалузевого балансу; оволодіти азами векторного числення; навчитись досліджувати властивості прямих та площин, кривих другого порядку; уміти обчислювати границі послідовностей та функцій; оволодіти елементарними методами обчислення похідних; оволодіти методами дослідження функцій за допомогою диференціального числення; оволодіти методами обчислення неозначених інтегралів; використовуватимуть методи аналізу та оцінювання програм сталого розвитку за допомогою елементарних математичних моделей (задачі на екстремум функції).

Студенти зможуть на основі отриманої інформації вносити пропозиції щодо оптимізації діяльності організації (підрозділу); засобами доступних пакетів прикладних програм розв'язувати ряд обчислювальних задач, у тому числі: дії над матрицями, розв'язування систем лінійних рівнянь, побудова графіків функцій, навчитись працювати із різними математичними формулами також за допомогою певних логічних операцій.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна вивчається у першому семестрі, тому пререквізитом є курс шкільної математики. Засвоєння дисципліни є неможливим без ґрунтовних знань елементарної математики в межах шкільної програми. За структурно-логічною схемою підготовки фахівця дана навчальна дисципліна тісно пов'язана з дисципліною «Теорія ймовірностей та математична статистика». Також слід врахувати, що вивчення основ математики сприятиме розвиненню спеціальних компетентностей у галузі розробки тактичних та оперативних планів управлінської діяльності, здатності до дослідницької та пошукової діяльності методами диференціального числення у сфері публічного управління та адміністрування. Без базових знань з основ математики також є неможливим повноцінне засвоєння дисципліни “Моделювання та прогнозування моделей та систем”.

3. Зміст навчальної дисципліни

1. Основи лінійної алгебри: матричне числення, системи лінійних рівнянь.

2. Векторний аналіз та основи аналітичної геометрії: пряма, площина та криві 2 порядку.

¹ у дужках після номеру подано шифр компетентності чи результату навчання згідно з ОПП.

3. Числення нескінченно-малих величин. Перша та друга важливі границі, порівняння нескінченно-малих та великих величин. Граничні показники в економічних задачах.

4. Основи диференціального числення: означення похідної, фізична, геометрична та економічна інтерпретація, різні методи обчислення похідних від найбільш відомих функцій, похідні вищих порядків. Дослідження та побудова графіків функцій методами диференціального числення. Застосування в економічних задачах: поняття еластичності функції, аналіз попиту та пропозиції за допомогою еластичності.

5. Елементи інтегрального числення. Означення, основні поняття та методи обчислень самих простих невизначених та визначених інтегралів, їх застосування до задач геометрії.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Барковський В. В. Барковська Н. В. Вища математика для економістів. Київ.: "Центр навчальної літератури", 2005. 445 с.
2. Герасимчук, В. С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навч. посіб. : у 3 ч. Ч.1. Київ : Книги України ЛТД, 2009. 578 с.
3. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ, 2005. 432 с.
4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2005. 480 с. URL: <https://library.kre.dp.ua/Books/2-4%20kurs/%D0%92%D0%B8%D1%89%D0%B0%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%94%D1%83%D0%B1%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%BA%2C%20%D0%AE%D1%80%D0%B8%D0%BA.%D0%92%D0%B8%D1%89%D0%B0%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.%20%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D1%8C.pdf> (дата звернення 18.05.2024).
5. Селезньова Н. П. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик та ін. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Електронні текстові дані (1 файл: 1,50 Мбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310> (дата звернення 18.05.2024).
6. Методичні вказівки і варіанти контрольних завдань з вищої математики. Частина I /укл.: Л. Г. Авраменко, О. Б. Качаєнко, О. Б. Поліщук, Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова, О. В. Суліма. Львів : Політехніка, 2001. 41 с.
7. Методичні вказівки і варіанти контрольних завдань з вищої математики. Частина II /укл.: Л. Г. Авраменко, О. Б. Качаєнко, О. Б. Поліщук, Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова, О. В. Суліма. Львів : Політехніка, 2001. 43 с.

Додаткова література

8. Сараєва Ю. О., Селезньова Н. П., Кушлик-Дивульська О. І. Деякі аспекти еволюції умовного оператора розгалуження. *Історія розвитку науки, техніки та освіти. Світоглядне значення наукової картини світу*: збірник праць XVII Міжнар. молодіжн. наук.-практ. конф., Київ, 23 квітня 2019 р. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. С. 67–68.
9. Селезньова Н. П. Петриняк Д. Ю. Кривини поверхні та оптимізація функції двох змінних. *Матеріали VII Міжнар. Наук.-практ. Конф. «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 28-29 грудня 2018 р. С. 122-128.
10. Селезньова Н. П., Кушлик-Дивульська О. І. Практичне застосування деяких математичних функцій із умовним оператором /Донбаська державна машино-будівна академія. *ДИСТАНЦІЙНА ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ*

«МАТЕМАТИКА У ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ XXI СТОРІЧЧЯ» Краматорськ, 15 -16 травня 2019 р. С. 202-205. URL:
http://www.dgma.donetsk.ua/docs/konf/2019/vm/konf2019matem25.05_1.pdf (дата звернення 18.05.2024).

11. Завдання з вищої математики для розрахункових робіт та модульних контрольних робіт для студентів I-го курсу технічних спеціальностей / укл. Селезнєва Н.П., Кузьма О.В. та ін. Київ : НТУУ "КПІ", ПП "Омега-Л", 2007. 55 с.

Інформаційні ресурси

1. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310>
2. <http://login.kpi.ua/>
3. <http://kmf.kpi.ua/>
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/>
5. <http://campus.kpi.ua/tutor/index.php?mode=mob&show&irid=2560>.
6. Електронний каталог науково-технічної бібліотеки НТУУ «КПІ». URL:
http://library.kpi.ua:8991/F/8V7A4N5CQ668NADB87TUN4HRX31QT5QRSDNNK6FLVBFITQ1LTN-00998?func=full-set-set&set_number=754749&set_entry=000025&format=999

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Методика викладання даного курсу полягає у традиційному прочитанні лекцій та проведенні практичних занять (за обставинами, онлайн) на яких частково викладач пояснює методи розв'язування задач та студенти розв'язують задачі на дошці і пояснюють хід розв'язання. Задачі з великим обсягом обчислень виносяться на комп'ютерний практикум. Протягом навчання студентам пропонуються домашні завдання із збірників задач. Найскладніші задачі розбираються на практичних заняттях. Завданнями для самостійної роботи є задачі розрахункової роботи, виконання завдань в Excel.

Використовуються різні методи навчання, а саме: за джерелом здобування знань (словесні, наочні, практичні), за способами організації навчальної діяльності студентів (методи здобування нових знань, методи формування умінь та навичок і застосування знань на практиці, методи перевірки й оцінювання знань, умінь та навичок). За характером навчально-пізнавальної діяльності студентів: пояснювально-ілюстративний (розповіді лекція, пояснення; робота з підручником і демонстрації та ін.); репродуктивний (відтворення знань і способів дій, діяльність за алгоритмом, програмою); проблемний виклад; частково-пошуковий (евристична бесіда); дослідницький метод та ін.

Лекційні та практичні заняття для студентів мають висвітлити ключові аспекти дисципліни, розібрати окремі, найбільш значущі її теми, допомогти студенту зорієнтуватися в обсязі та змісті навчального матеріалу, який виноситься на залік.

Завдання та методичні рекомендації до виконання практичних робіт, питання до МКР, семестрового контролю та інші матеріали публікуються у Googleclassroom та системі «Електронний кампус» та пересилаються на групову пошту.

Орієнтовні плани лекційних та практичних занять наведені нижче. Тематику лекційних занять повністю відповідають практичним заняттям.

Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1. Визначники та матриці. Визначники, їх властивості, системи лінійних рівнянь. Формули Крамера. Види матриць, дії з ними. Обернена матриця, ранг матриці. Метод Гаусса розв'язування СЛАР, матричний метод. Застосування лінійної алгебри в задачах економіки: схема міжгалузевого балансу. Використання матричних розрахунків в публічному управлінні та адмініструванні. Завдання на СРС: опрацювати матеріал лекцій та розібрати модель міжгалузевого балансу Леонтьєва. Дидактичні засоби: [1,3,4,6,10,11] Завдання на СРС: Задачі [1,5,10,11]
2. Елементи аналітичної геометрії Вектори, операції над векторами. Добутки векторів, їх властивості. Застосування векторів у публічному управлінні та адмініструванні. Завдання на СРС: Задачі [1,3,4] Дидактичні засоби: [1,3,5,6]
3. Площина та пряма. Площина, різні види рівняння площини, пряма на площині і у просторі, різні види її рівнянь. Відстані та кути між прямими та площинами. Завдання на СРС: Задачі [1,3,4,5] Дидактичні засоби: [1,3,5,6]
4. Криві 2-го порядку: коло, еліпс, парабола, гіпербола, їх канонічні рівняння, властивості. Застосування кривих другого порядку в публічній та адміністративній діяльності. Завдання на СРС: Задачі [1,3,4,5,] Дидактичні засоби: [1,3,5,6]
5. Числові послідовності, границя послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Нескінченно малі та великі послідовності. Використання послідовностей і границь в публічному управлінні та адмініструванні. Завдання на СРС: Задачі [1,3,4,5] Дидактичні засоби: [1,3,5,7]
6. Функції, основні типи функцій. Границя функції, дії з границями. Важливі границі. Неперервність функції. Дії над неперервними функціями. Точки розриву функції та їх класифікація Завдання на СРС: Задачі [1,2,5,8,10] Дидактичні засоби: [1,5,8]
7. Похідна, її геометричний зміст, таблиця похідних. Похідна складеної, оберненої, Диференціал функції, його геометричний зміст. Диференціал суми, добутку, частки функцій. Похідні вищих порядків. Основні теореми диференціального числення. Правило Лопітала. Застосування похідної в публічній та адміністративній діяльності. Завдання на СРС: Задачі [1,2,5,8] Дидактичні засоби: [1,5,8]
8. Повне дослідження функції та побудова графіку функції. Зростання та спадання функцій, екстремум функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Опуклість функції, точки перегину, асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функції та побудови її графіку. Використання функцій та графіків в публічному управлінні та адмініструванні. Завдання на СРС: Задачі [1,2,7,8] Дидактичні засоби: [1,7,8]

9. Невизначений інтеграл. Первісна функції та невизначений інтеграл, їх властивості. Інтегрування частинами та підстановкою. Інтегрування раціональних дробів; функцій, раціональних відносно синуса та косинуса; інтегрування деяких ірраціональностей. <i>Завдання на СРС: Задачі [1,2,7,8]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,7,8]</i>
10. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли I та II роду. Застосування інтегрального числення до задач геометрії та економіки. <i>Завдання на СРС: Задачі [1,2,7,8]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,7,8]</i>
Виконання розрахункової роботи та МКР

Орієнтовні плани занять з комп'ютерного практикуму для заочної форми навчання наведені нижче

Комп'ютерний практикум проводиться за принципом "збірника рецептів", які часто застосовуються на практиці і достатньо просто реалізуються в електронних таблицях. Практикум має надати практичні навички роботи користувача ПЕОМ, необхідні в подальшій професійній роботі студентів.

На заняттях з комп'ютерного практикуму в даному курсі застосовується одна з найпростіших і загальноживаних програм для роботи з електронними таблицями – Excel, яка придатна для розв'язування задач з вищої математики.

Ця програма є достатньо простою в застосуваннях та найбільш поширеною на практиці. Вона дозволяє виконувати чисельні обчислення та має зручний математико-орієнтований інтерфейс. Вона не тільки дозволяє полегшити розв'язування складних математичних задач, а і знімає певний психологічний бар'єр у вивченні математичних методів, і в подальшому дозволяє перейти до реального моделювання економіко-управлінських систем.

Основними завданнями комп'ютерного практикуму є:

- навички роботи засобами MS Excel для математичних обчислень з обробки великих обсягів даних;
- застосування математичних формул для обробки двовимірних масивів даних (тобто для проведення операцій матричного числення);
- набуття навичок з побудови графіків функцій в декартовій та полярній системах координат;
- опанування роботи з логічними функціями Excel.

№ з/п	Назва лабораторної роботи
1	Робота з математичними формулами в Excel
2	Дії над матрицями. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом.
3	Міжгалузевий баланс. Модель Леонтьєва.
4	Побудова графіків функцій засобами Excel, логічні функції.
5	Еластичність функції. Аналіз попиту та пропозиції ринку за допомогою еластичності.

6. Самостійна робота студента

Питання до самостійного опрацювання зазначені в завданнях до практичних занять та оголошуються на лекціях, також пересилаються у вигляді сповіщень на групову пошту. Теми: «Міжгалузевий баланс та модель Леонтьєва», «Еластичність функції», «Аналіз попиту та

пропозиції ринку за допомогою еластичності», «Векторна алгебра, площа, пряма, криві другого порядку» виносяться на самостійне опрацювання. Також до самостійної роботи студента відносяться поточні завдання для домашніх робіт та завдання РР.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

- **правила відвідування занять** (як лекцій, так і практичних/занять з комп'ютерного практикуму);

відвідування лекцій, практичних занять, занять з комп'ютерного практикуму а також відсутність на них, не оцінюється. Однак, студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для виконання семестрового індивідуального завдання. Система оцінювання орієнтована на отримання балів за активність студента, а також виконання завдань, які здатні розвинути практичні уміння та навички. За пропуски занять слід виконувати та захищати додаткові завдання, згідно пропущених тем.

- **правила поведінки на заняттях:**

активність студента на занятті означає розв'язування та задач та відповіді на теоретичні питання;

під час заняття обов'язково мають бути відключені телефони та будь-які інші гаджети;

захист РР та завдань комп'ютерного практикуму відбувається після представлення відповідних робіт у письмовому/електронному вигляді. Захист робіт включає у себе питання теоретичного характеру, згідно темі роботи;

контрольна, розрахункова роботи, завдання з комп'ютерного практикуму, які подаються на перевірку з порушенням терміну виконання, оцінюються із врахуванням штрафних балів.

заохочувальні бали надаються за підготовку доповіді на конференцію, написанні під керівництвом викладача наукової роботи, розв'язування задач підвищеної складності;

передбачено перескладання модульних контрольних робіт (не більше двох раз).

Обов'язково слід виконати роботу над помилками в РР, якщо такі помилки буде допущено

роботи виконані не самостійно, чи за допомогою онлайн-калькулятора, не зараховуються.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (РСО)

Поточний контроль: відповіді на практичних заняттях, експрес-опитування, МКР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

Семестровий контроль: залік.

Рейтингова система оцінювання

№ з/п	Контрольний захід оцінювання	Ваговий бал	Кількість	Всього
1.	Активність на практичних заняттях	6	1	6
2.	МКР	24	1	24
3.	Виконання та захист РР	20	1	20
4.	Виконання та захист завдань комп'ютерного практикуму	20	1	20
5.	Залік	30	1	30
	Всього			100

Критерії оцінювання кожного заходу розміщуються в кампусі та/або оголошуються перед контрольним заходом, сповіщаються на групову пошту.

Обов'язкові умови допуску до заліку (денна форма навчання)		Критерій
1	Рейтинг	Не менше 36 балів
2	МКР	Не менше 14 балів
3	Виконання та захист РР	Не менше 12 балів
4	Виконання та захист завдань комп'ютерного практикуму	Не менше 10 балів

Заохочувальні та штрафні бали

Написання тез за тематикою навчальної дисципліни	до 10 балів
Написання статті або участь у міжнародних, всеукраїнських та/або інших заходах чи конкурсах (за тематикою навчальної дисципліни)	до 10 балів
Виконання та захист РР із порушенням термінів (без поважних причин)	(-1) бал за кожний день затримки

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Особливості онлайн навчання:

усі заняття з дисципліни записуються і усім студентам надається доступ до цих записів. Заняття проводяться в ZOOM. Посилання на ці заняття надаються студентам на початку семестру. Консультації проводяться за узгодженим часом зі студентами в ZOOM.

Онлайн-курси

Дистанційне навчання через проходження сторонніх онлайн-курсів за тематикою дисципліни допускається за умови погодження із викладачем. При пред'явленні сертифікату про проходження курсу та його програми студенту можуть бути зараховані додаткові бали за виконання певних додаткових завдань за тематикою курсу (відповіді на практичних заняттях, практичні завдання). При цьому контрольні заходи з дисципліни виконуються на загальних підставах.

Інклюзивне навчання

Навчальна дисципліна може викладатися для усіх студентів з особливими освітніми потребами та задовільним знанням курсу шкільної математики. У випадку потреби завдання можуть бути скориговані.

Питання до заліку

Розділ 1. Лінійна алгебра, елементи аналітичної геометрії

1. Визначники та матриці. Визначники, їх властивості, системи лінійних рівнянь. Формули Крамера. Види матриць, дії з ними. Обернена матриця, ранг матриці. Метод Гаусса розв'язування СЛАР, матричний метод.

2. Застосування лінійної алгебри в задачах економіки: модель міжгалузевого балансу Леонтьєва.

3. Вектори, операції над векторами (додавання та віднімання векторів, добуток вектора на скаляр, властивості цих операцій). Лінійна залежність (незалежність) векторів, поняття базису, координати вектора. Добутки векторів (скалярний, векторний, мішаний), їх властивості.

4. Площина та пряма. Площина, різні види рівняння площини, пряма на площині та у просторі, різні види її рівнянь. Відстані та кути між прямими та площинами. Умови паралельності і перпендикулярності прямих та площин. Прямі на площині: види їх рівнянь та умови їх паралельності і перпендикулярності.

5. Криві 2-го порядку: коло, еліпс, парабола, гіпербола, їх канонічні рівняння, властивості та основні параметри.

6. Наведіть приклад використання матричних обчислень у моделюванні економічних чи соціальних процесів.

7. Як застосовуються системи рівнянь у прогнозуванні фінансових потоків у державному управлінні?

8. Як знаходиться визначник матриці, і яке його значення в управлінських розрахунках?

Розділ 2. Теорія границь.

1. Числові послідовності, границя послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Нескінченно малі та великі послідовності.

2. Функції, основні типи функцій. Границя функції, дії з границями. Важливі границі. Неперервність функції. Дії над неперервними функціями. Точки розриву функції та їх класифікація.

3. Як арифметична та геометрична прогресії можуть бути використані в аналізі соціально-економічних процесів?

4. Як поняття границі використовується при аналізі економічних або демографічних показників у державному управлінні?

5. Як можна використовувати числові послідовності для прогнозування динаміки бюджетних витрат або доходів?

6. Наведіть приклад використання числових послідовностей у плануванні соціальних програм.

7. Як аналіз збіжності може допомогти у довгостроковому плануванні стратегічного розвитку регіону?

Розділ 3. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1. **Похідна**, означення та геометричний і фізичний зміст, таблиця похідних. Похідна складеної, оберненої, параметрично заданої функції. Диференціал функції, його геометричний зміст. Диференціал суми, добутку, частки функцій. Похідні вищих порядків. Основні теореми диференціального числення: теореми Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопіталя. Застосування поняття похідної до задач економіки: поняття еластичності функції (означення, властивості).

2. **Повне дослідження функції та побудова графіку функції.** Зростання та спадання функцій, екстремум функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Опуклість функції, точки перегину, асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функції та побудови її графіку.

3. Який геометричний та економічний зміст похідної?

4. Як похідна використовується для аналізу динаміки змін економічних показників, таких як ВВП, рівень інфляції чи податкові надходження?

5. Наведіть приклад застосування похідної для оптимізації державних витрат або ефективного розподілу ресурсів.

6. Як можна використовувати диференціал для оцінки малих змін у фінансових або соціальних процесах?

7. Як знаходження точок екстремуму (максимумів і мінімумів) допомагає у визначенні оптимальних стратегій управління?

8. Як дослідження монотонності та кривизни функцій допомагає у прогнозуванні економічного розвитку регіону?

Розділ 4. Інтегральне числення.

1. Невизначений інтеграл. Первісна функції та невизначений інтеграл, їх властивості.

2. Основні методи обчислення інтегралів:

- операція внесення під знак інтегралу;
- заміна змінних;
- інтегрування частинами;
- інтегрування дробово-раціональних виразів;
- інтегрування тригонометричних функцій;
- інтегрування ірраціональних виразів;
- універсальна тригонометрична підстановка.

Визначений інтеграл

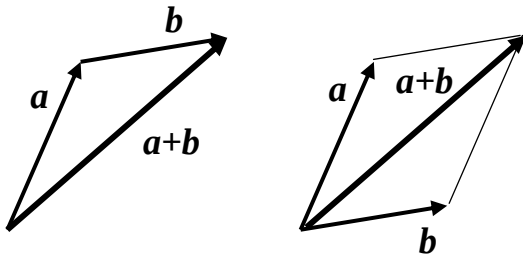
- означення та властивості;
- методи обчислення та заміна змінних;
- невластні інтеграли I та II роду;
- обчислення площ плоских фігур, довжини кривої та об'єму тіла за допомогою інтегрального числення

Довідковий матеріал

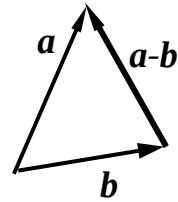
ВЕКТОРИ

Дії над векторами

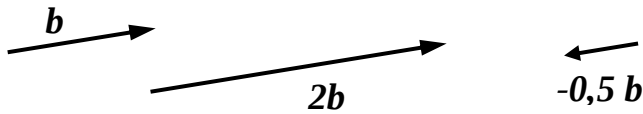
1. Додавання векторів



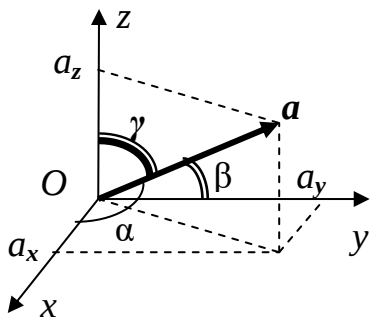
2. Віднімання векторів



3. Множення на число (приклади)



Вектори у декартовій системі координат



$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = (a_x; a_y; a_z) ,$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) .$$

Довжина вектора $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

Напрямні косинуси $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$

Дії над векторами, заданими у координатній формі

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z),$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z),$$

$$\lambda \bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Умова колінеарності векторів $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$

Скалярний та векторний добутки векторів

Добуток	Скалярний	Векторний
Позначення	$\vec{a} \cdot \vec{b}, (\vec{a}, \vec{b})$	$\vec{a} \times \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$
Тип величини	Число	Вектор
Означення	$ \vec{a} \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b})$	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо: 1) $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2) трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права; 3) $\vec{c} = \vec{a} \vec{b} \sin(\vec{a}, \vec{b})$
Властивості	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
Добутки ортів	$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$	$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ $\rightarrow + \quad \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \quad \vec{i} \quad \vec{j} \quad \leftarrow -$
Обчислення в ДСК	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Основні задачі	довжина вектора $ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ косинус кута між векторами $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$ проекція вектора на інший вектор $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} }$ умова перпендикулярності $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $S = \vec{a} \times \vec{b} $ площа трикутника $S_{\Delta} = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{2}$ висота паралелограма $h_a = \frac{S}{ \vec{a} } = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a} }$ висота трикутника $h_a = \frac{2 S_{\Delta}}{ \vec{a} } = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a} }$
---------------------------	---	---

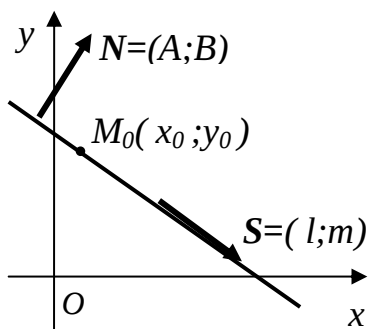
Мішаний добуток векторів

Позначення	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ або $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
Означення	$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
Властивості	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$
Обчислення у ДСК	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

Основні задачі	умова компланарності трьох векторів $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ орієнтація трійки векторів: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0 \quad - \text{права трійка} ;$ $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0 \quad - \text{ліва трійка}$ об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $V_{\text{паралелепіпеда}} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} $ об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \vec{a} \vec{b} \vec{c} $ висота паралелепіпеда $h = \frac{V_{\text{паралелепіпеда}}}{S_{\text{грані}}} = \frac{ \vec{a} \vec{b} \vec{c} }{ \vec{a} \times \vec{b} }$ висота піраміди
---------------------------	---

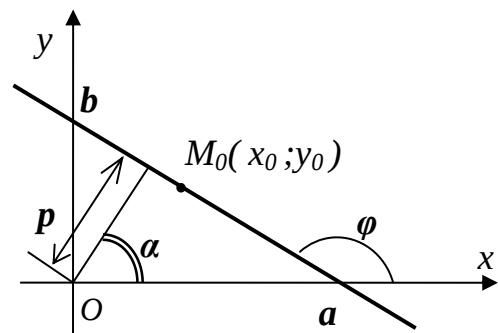
	$h = \frac{3V_{\text{піраміди}}}{S_{\text{грані}}} = \frac{ \vec{a}\vec{b}\vec{c} }{ \vec{a} \times \vec{b} }$
--	--

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ



Найпростіше рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$



Рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Загальне рівняння

$$Ax + By + C = 0.$$

Рівняння прямої, що проходить у

заданому напрямку (рівняння в'язки)

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Канонічне рівняння

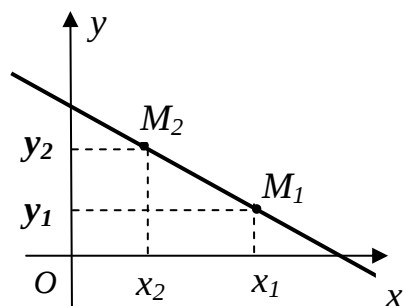
Рівняння у відрізках на осях

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} .$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 .$$

Нормальне рівняння

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 .$$



Рівняння прямої, що проходить
через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} ; \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

Умова паралельності прямих

$$k_2 = k_1 .$$

Умова перпендикулярності прямих

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} .$$

Кут θ між прямими (гострий)

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| .$$

Відстань від точки M до прямої

$$d(M) = |x_M \cos \alpha + y_M \sin \alpha - p|$$

,

або

$$d(M) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

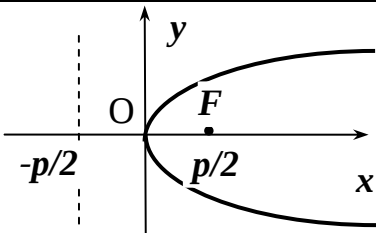
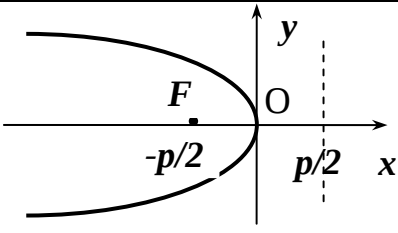
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Еліпс та гіпербола

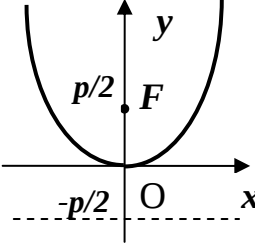
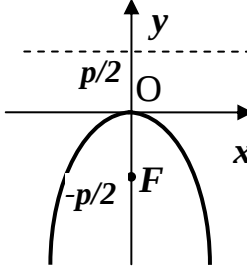
Крива	<i>Еліпс з фокусами на вісі Ox</i>	<i>Гіпербола з фокусами на вісі Ox</i>
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Піввісі ($2a, 2b$ – вісі)	a – велика b – мала	a – дійсна b – уявна
Відстань від центра до фокусів	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Координати фокусів	$F_1(c; 0); F_2(-c; 0)$	$F_1(c; 0); F_2(-c; 0)$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon < 1)$	$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1)$
Рівняння директрис	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad \left(x = \pm \frac{a^2}{c} \right)$	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad \left(x = \pm \frac{a^2}{c} \right)$
Рівняння асимптот	—	$y = \pm \frac{b}{a} x$

Відстані від точки М до фокусів	$F_1M = r_1 = a - \varepsilon x_M$ $F_2M = r_2 = a + \varepsilon x_M$	$F_1M = r_1 = a - \varepsilon x_M $ $F_2M = r_2 = a + \varepsilon x_M $
Рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Ох

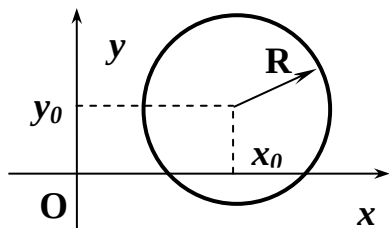
рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$
рівняння директриси	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$
рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Оу

рівняння	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
координати фокуса	$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
рівняння директриси	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
рисунок		

Зсунені криві

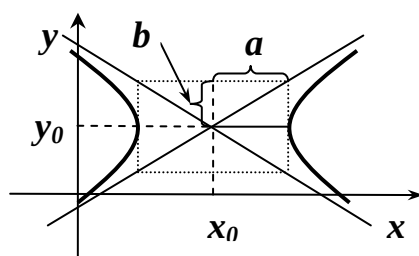
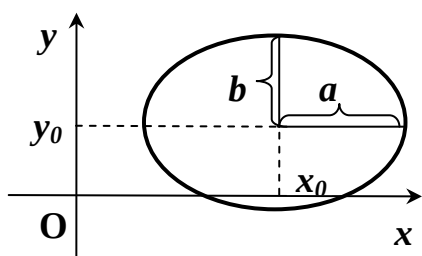
Коло $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



Еліпс $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

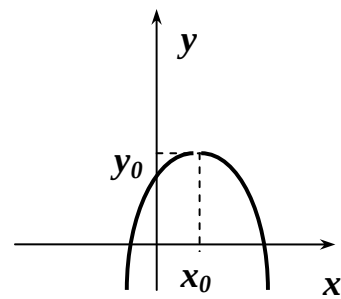
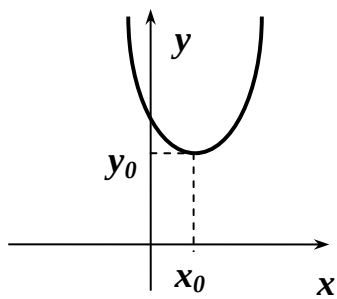
Гіпербола

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



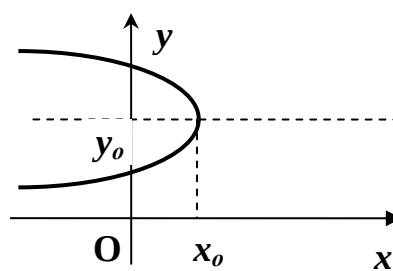
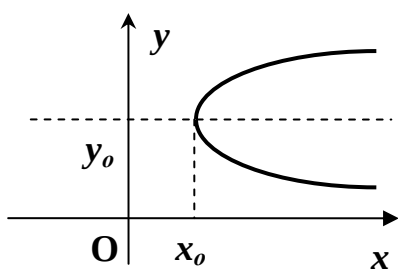
Параболы $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$



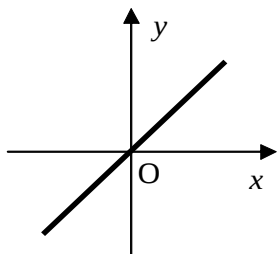
$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

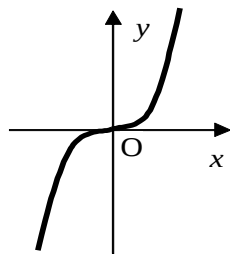


ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

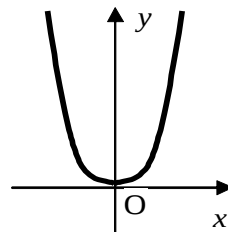
Алгебраїчні функції



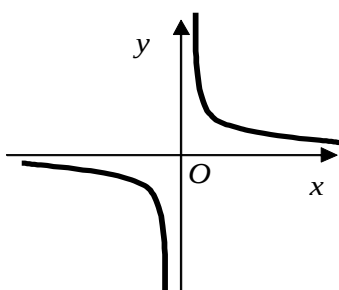
$$y = x$$



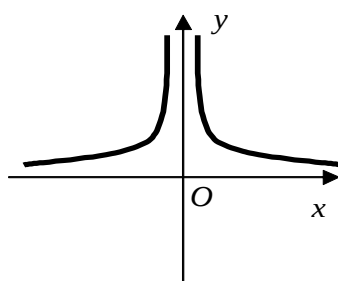
$$y = x^3, \quad y = x^{2n+1}$$



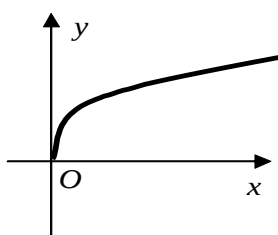
$$y = x^2, \quad y = x^{2n}$$



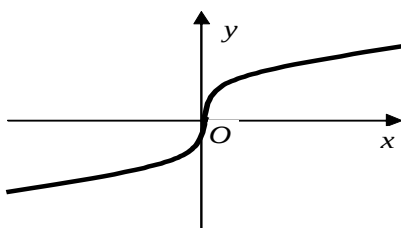
$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^{2n+1}}$$



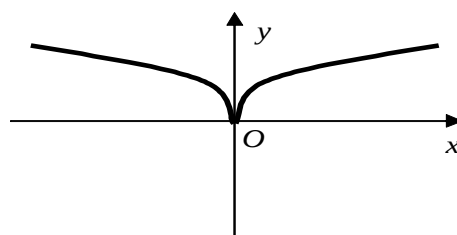
$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^{2n}}$$



$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[2n]{x}$$



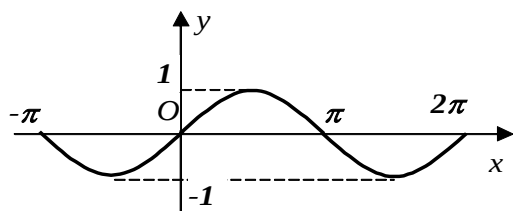
$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \sqrt[2n+1]{x}$$



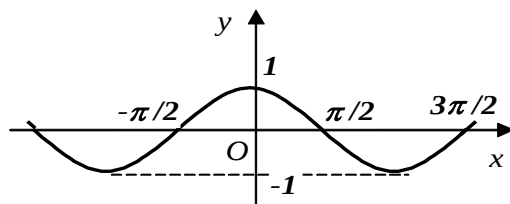
$$y^3 = x^2, \quad y^{2n+1} = x^{2m}$$

$$(2n+1 > 2m)$$

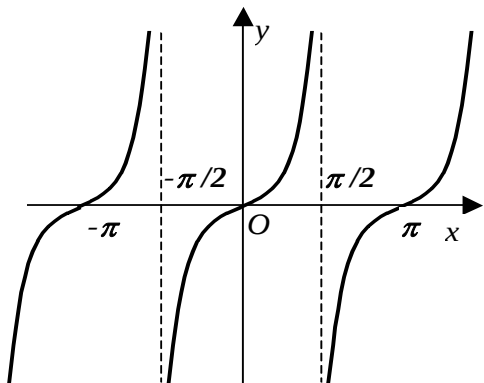
Трансцендентні функції



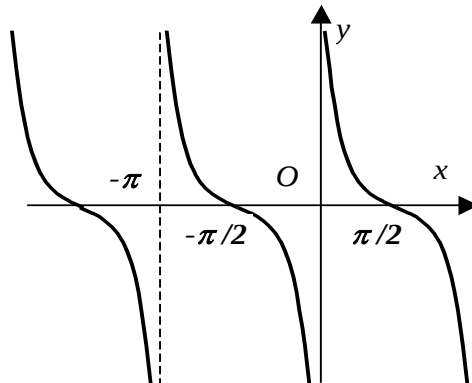
$$y = \sin x$$



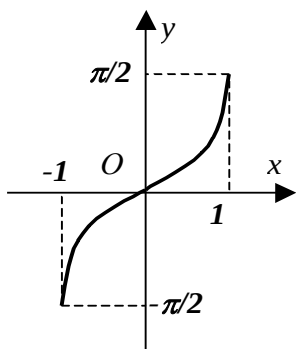
$$y = \cos x$$



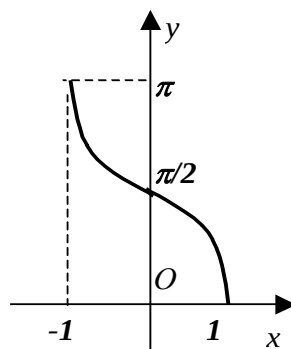
$$y = \operatorname{tg} x$$



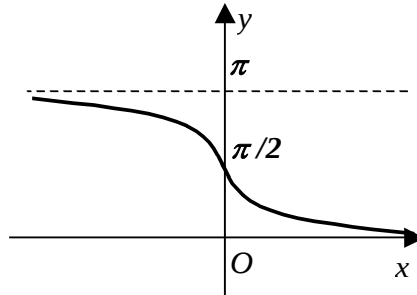
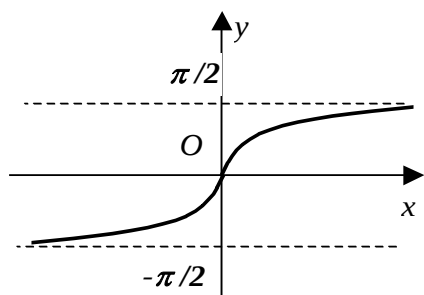
$$y = \operatorname{ctg} x$$



$$y = \arcsin x$$

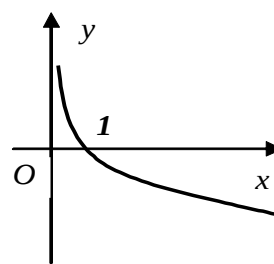
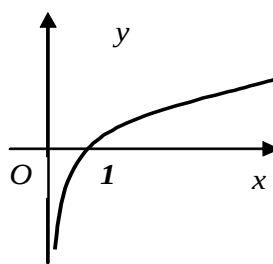
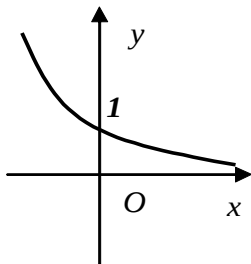
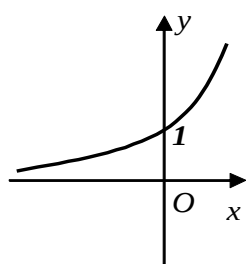


$$y = \arccos x$$



$$y = \arctg x$$

$$y = \operatorname{arcctg} x$$



$$y = a^x, a > 1$$

$$y = a^x, 0 < a < 1$$

$$y = \log_a x, a > 1$$

$$y = \log_a x$$

$$0 < a < 1$$

ГРАНИЦІ

Перша важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

У випадку невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ треба поділити чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 + 3x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 4x + 5}{x^3}}{\frac{x^2 + 3x - 8}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty;$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[4]{3x^4+x}}{\sqrt{x^2+7}} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} + \frac{\sqrt[4]{3x^4+x}}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+7}}{x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3}} + \sqrt[4]{\frac{3x^4+x}{x^4}}}{\sqrt{\frac{x^2+7}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[4]{3 + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}} = \sqrt[4]{3} ;
\end{aligned}$$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1) + n!}{(n+1)(n+2)n!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+2)}{n!(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0.$$

У випадку невизначеності $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ слід чисельник та знаменник розкласти на множники.

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 8} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x-4} = \frac{12}{-2} = -6.$$

Якщо границя містить ірраціональність, позбутися її за допомогою формул скороченого множення; якщо невизначеність не зникне, а трансформується у (∞/∞) , поділити на старший степінь змінної (з урахуванням добування коренів).

$$\begin{aligned}
5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 9} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x+3} - 3)(\sqrt{2x+3} + 3)}{(x^2 - 9)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{(x^2 - 9)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x+3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Якщо вираз має тригонометричні функції, перетворити суми тригонометричних функцій на добутки; множники, границя котрих не дорівнює 0 або ∞ , замінити цими границями; для кожного множника, який прямує до 0, побудувати 1-у важливу границю.

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x} = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \cdot \sin x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x}{x^2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot x}{x^2} = 6 \end{aligned}$$

У випадку степенево-показникової функції (невизначеність (1^∞)) основу записати як суму 1 та нескінченно малої функції, побудувати другу важливу границю та перейти до границі у показнику.

$$\begin{aligned} 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-4} \right)^x &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+1}{3x-4} - 1 \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x-4} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{3x-4} \right)^{\frac{3x-4}{5}} \right]^{\frac{5}{3x-4} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3x-4}} = e^{\frac{5}{3}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 2} (1 + (3x-5) - 1)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (1 + (3x-6))^{\frac{1}{x-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[(1 + (3x-6))^{\frac{1}{3x-6}} \right]^{\frac{3x-6}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{x-2}} = e^3. \end{aligned}$$

ПОХІДНІ

Похідні основних

елементарних функцій

$$1. \left(x^n\right)' = n x^{n-1}$$

$$2. (x)' = 1$$

$$3. \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5. \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$6. \left(e^x\right)' = e^x$$

$$7. \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$8. \left(\lg x\right)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

$$9. \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$10. \left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$11. \left(\cos x\right)' = -\sin x$$

Похідні складених

елементарних функцій

$$1a. \left(u^n\right)' = n u^{n-1} \cdot u'$$

$$3a. \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$4a. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$5a. \left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$6a. \left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$$

$$7a. \left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

$$8a. \left(\lg u\right)' = \frac{1}{u \ln 10} \cdot u'$$

$$9a. \left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$10a. \left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$$

$$11a. \left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$$

$$12. \quad (tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12a. \quad (tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$13. \quad (ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13a. \quad (ctg\ u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$14. \quad (\arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14a. \quad (\arcsin\ u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$15. \quad (\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15a. \quad (\arccos\ u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$16. \quad (arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16a. \quad (arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$17. \quad (arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$17a. \quad (arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

$$1. \quad C' = 0$$

$$2. \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \pm C)' = u'$$

$$3. \quad (uv)' = u'v + v'u$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

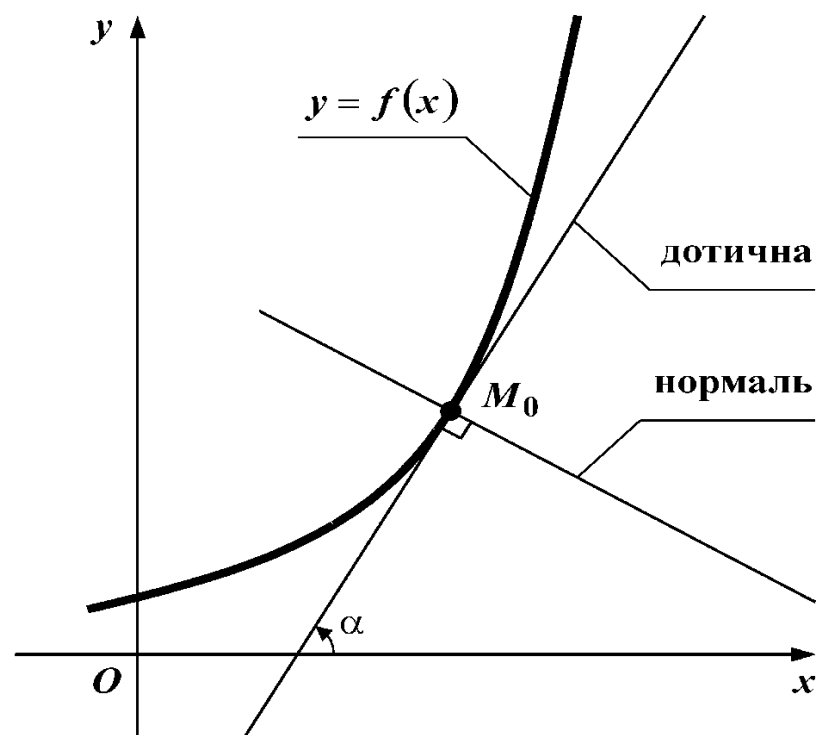
$$(C \cdot x)' = C$$

$$4. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{C} \right)' = \frac{u'}{C}$$

$$\left(\frac{x}{C} \right)' = \frac{1}{C}$$

ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ



$y - y_0 = k(x - x_0)$ - рівняння прямої через т. $M_0(x_0; y_0)$;

$k = \operatorname{tg} \alpha = y'(M_0)$ - геометричний зміст похідної;

$y - y_0 = y'(M_0)(x - x_0)$ - рівняння дотичної;

$k_1 \cdot k_2 = -1$ - умова перпендикулярності прямих;

$y - y_0 = -\frac{1}{y'(M_0)}(x - x_0)$ - рівняння нормалі.

Дотична і нормаль до даної лінії в заданій точці – це є прямі, що проходить через точку дотику $M_0(x_0; y_0)$.

Геометричний зміст похідної в даній точці $M_0(x_0; y_0)$: значення похідної в даній точці $y'(M_0)$ є тангенс кута α , під яким дотичне до кривої в точці M_0 перетинає вісь OX . Нормаль перпендикулярна до дотичної в точці дотику M_0 . Тому слід використати умову перпендикулярності двох прямих: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ

Для дослідження функції і побудови її графіка студент повинен добре знати, що при зростанні функції - $y' > 0$, при спаданні - $y' < 0$ і розуміти різницю між необхідною та достатньою умовами існування екстремуму функції, а також необхідною і достатньою умовами існування точок перегину.

$y'(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування екстремуму;

$y''(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування точок перегину.

Із цих умов знаходяться критичні точки.

Достатня умова для існування екстремуму в т. M_0 або точки перегину – зміна знака відповідно до першої і другої похідної при переході через критичну точку.

$y' > 0$ – функція зростає $\nearrow$; $y' < 0$ – функція спадає $\searrow$;

$y'' > 0$ – функція опукла вниз $\cup^+$; $y'' < 0$ – функція опукла вгору $\cap^-$.

ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. а) $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.

б) $d \int f(x) dx = f(x) dx$.

в) $\int df(x) = f(x) + C$.

2. а) $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx, \quad A = \text{const}$.

б) $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$.

в) $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Заміна змінної

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$$

$$x \, dx \rightarrow x^2 = t$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} \rightarrow \operatorname{ctg} x = t$$

$$x^n \, dx \rightarrow x^{n+1} = t$$

$$\sin x \, dx \rightarrow \cos x = t$$

$$\cos x \, dx \rightarrow \sin x = t$$

$$e^{kx} \, dx \rightarrow e^{kx} = t$$

$$a^x \, dx \rightarrow a^x = t$$

$$\frac{dx}{x} \rightarrow \log_a x = t, \ln x = t$$

$$\frac{dx}{x^n} \rightarrow \frac{1}{x^{n-1}} = t$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = t$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arcsin x = t,$$

$$\arccos x = t$$

$$\frac{dx}{1+x^2} \rightarrow \operatorname{arctg} x = t,$$

$$\operatorname{arcctg} x = t$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} \rightarrow \operatorname{tg} x = t$$

Інтегрування частинами

$$\underline{\int u \, dv = u \, v - \int v \, du}$$

$$1) \quad \int \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^n \\ P_n(x) \end{bmatrix}}_u \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx}, a^x \end{bmatrix}}_{dv} dx; \quad \int \underbrace{\frac{x}{\cos^2 kx}}_{u=x} dx; \quad \int \underbrace{\frac{x}{\sin^2 kx}}_{u=x} dx.$$

$$2) \quad \int x^s \underbrace{\log_a^n x}_u dx, \quad s \neq -1; \quad \int x^n \underbrace{\arcsin kx}_u dx; \quad \int x^n \underbrace{\arctg kx}_u dx.$$

3) Циклічні інтеграли

$$\int \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix}}_u \underbrace{\begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^x \end{bmatrix}}_{dv} dx; \quad \int \underbrace{\sin \ln x}_u dx; \quad \int \underbrace{\cos \ln x}_u dx; \quad \int \underbrace{\sqrt{ax^2 + b}}_u dx$$

Таблиця інтегралів

$$1. \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2+p} = \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{p}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2-p} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{p}}{x+\sqrt{p}} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm p} \right| + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{p-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{p}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$10. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$11. \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$14. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$16. \int \frac{x \, dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2 + b| + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{x^2 + b} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + b| + C$$

$$17. \int \frac{x \, dx}{\sqrt{ax^2 + b}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + b} + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b} + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{b - x^2}} = -\sqrt{b - x^2} + C$$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Формула Ньютона - Лейбніця для обчислення визначених інтегралів

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Спосіб підстановки у визначених інтегралах

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \left| \begin{array}{ll} \varphi(t) = x; & \text{при } t = \beta \quad x = \varphi(\beta) = b \\ \varphi'(t)dt = dx; & \text{при } t = \alpha \quad x = \varphi(\alpha) = a \end{array} \right| = \int_a^b f(x)dx.$$

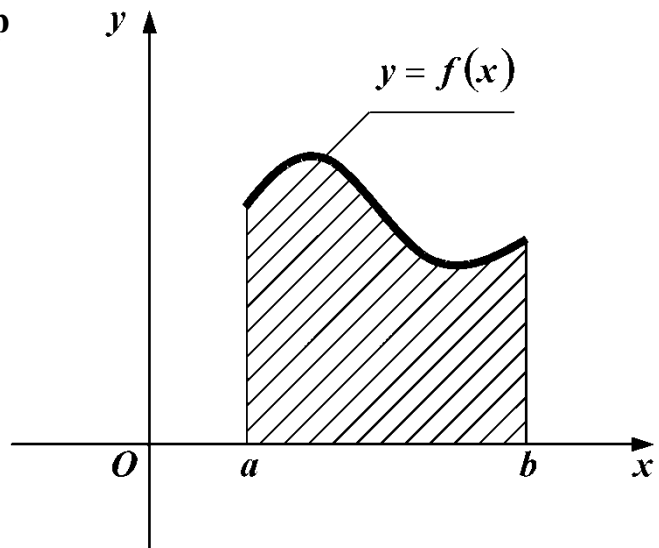
Спосіб інтегрування за частинами у визначених інтегралах

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

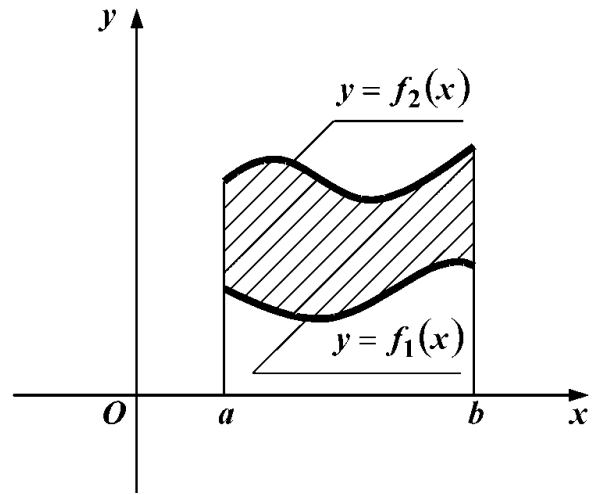
Обчислення площі плоскої фігур

а) криволінійна трапеція:

$$S = \int_a^b f(x)dx; \quad f(x) > 0,$$

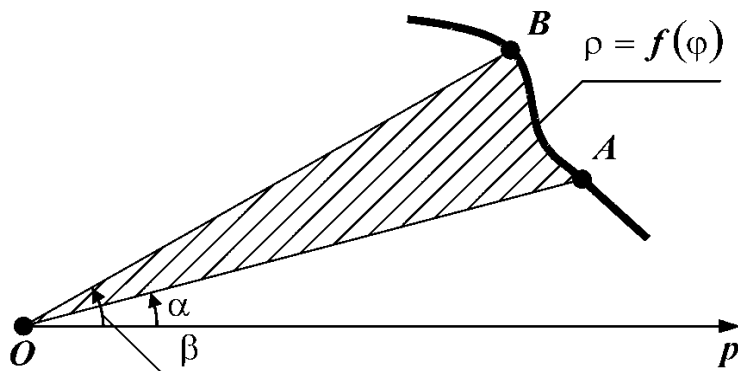


$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx; \quad f_2(x) > f_1(x).$$



б) криволінійний сектор:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\alpha} \rho^2(\varphi) d\varphi ,$$



Невласні інтеграли з нескінченними границями

а) невласті інтеграли з нескінченними границями

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \text{ де } c - \text{довільне значення, } f(x) - \text{всюди}$$

неперервна функція.

Якщо границя такого інтегралу є кінцевою, то такий інтеграл називається збіжним; у разі, коли інтеграл прямує до ∞ , його називають розбіжним.

б) невластні інтеграли від розривних функцій

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

де $x = c$ – точка розриву функції, де

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$$

$$\int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено:

доцентом кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь, кандидатом фіз.-мат. наук Селезньовою Надією Петрівною

Ухвалено кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь (протокол № 8 від 23.05.2024)

Погоджено Методичною комісією факультету соціології і права (протокол № 9 від 26.06.2024)